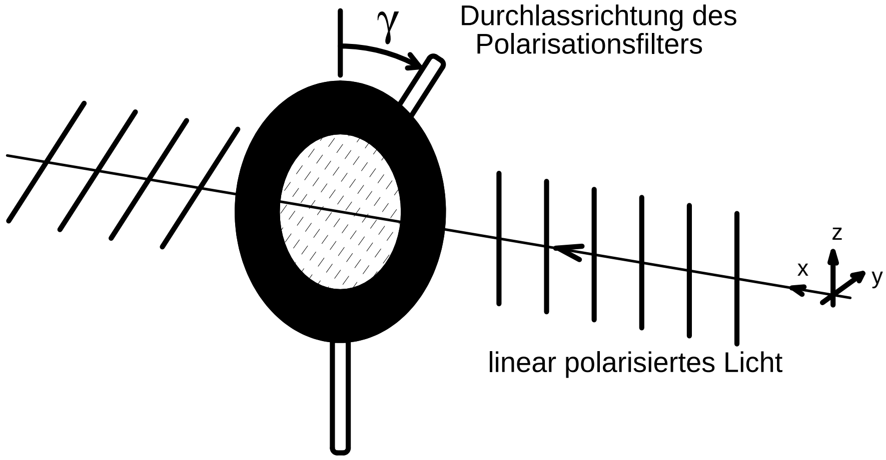
Das EPR–Paradoxon und die Bell'sche Ungleichung

3. August 2002/ Götz

In den letzten Jahrzehnten ist es gelungen, die Grundlagen der Quantentheorie durch eine Reihe spektakulärer Experimente zu überprüfen. Insbesondere die Frage, ob die Unbestimmtheit quantenphysikalischer Messgrößen lediglich eine Unkenntnis über die wahren Werte darstellt, oder ob die 'Dinge an sich' unbestimmt sind, konnte durch experimentelle Befunde zugunsten der letzteren Aussage erhärtet werden. Im Folgenden[1] wird eine Variante zum EPR–Paradoxon vorgestellt, deren Ergebnisse die Annahme der Existenz von 'verborgenen Parametern' in Form einer 'Bell'schen Ungleichung' ausschließt.

> 1935 prägte E. Schrödinger für Zwei-Teilchen-Systeme, die gemeinsam *einen* Quantenzustand darstellen, den Begriff eines 'verschränkten Quantenzustands'. Misst man eine Quanteneigenschaft an einem Teilchen, so nimmt sein Partner die durch den gemeinsamen Quantenzustand vorgegebene Eigenschaft an – auch wenn die beiden Teilchen sehr weit voneinander entfernt sind. Diese dem 'gesunden Menschenverstand' und der klassischen Physik widersprechende Aussage veranlassten Albert Einstein, Boris Podolsky und Nathan Rosen (EPR) zur Formulierung eines Gedankenexperiments, das die 'Kopenhagener Deutung' der Quantenphysik 'aushebeln' sollte[2].
> Demnach ist die Quantenphysik entweder nichtlokal, d.h. z.B., dass die Messung an *einem* Teilchen die Messung an einem anderen Teilchen unmittelbar beeinflussen kann – auch wenn beide beliebig weit voneinander entfernt sind –, oder die Quantenphysik ist unvollständig; es existieren noch unbekannte Parameter oder unbekannte Variablen.
> Einstein, Podolsky und Rosenstein konnten sich mit der Nichtlokalität verschränkter Systeme nicht anfreunden.

Experimente mit polarisierten Photonen



[1] Nach der Homepage von Franz Embacher; http://www.ap.univie.ac.at/users/fe/Quantentheorie/EPR/

[2] Die drei Physiker veröffentlichten im Jahr 1935 einen aufsehenerregenden Artikel in Physical Review mit dem Titel: „Can Quantum-Mechanical Description Be Considered Complete?" Dieser Beitrag löste eine kontroverse Diskussion aus, in der zunächst Niels Bohr in derselben Zeitschrift unter demselben Titel antwortete. Das ursprünglich von Einstein, Rosen und Podolsky formulierte Experiment war komplizierter als das im Folgenden hier geschilderte mit polarisierten Photonen.

1) Beschreibung mit klassischen elektromagnetischen Wellen

Von rechts her falle monochromatisches, linear polarisiertes Licht auf ein Polarisationsfilter. Im gezeichneten Fall schließen die Polarisationsrichtung der Welle und die Durchlassrichtung des Polfilters einen Winkel γ ein.

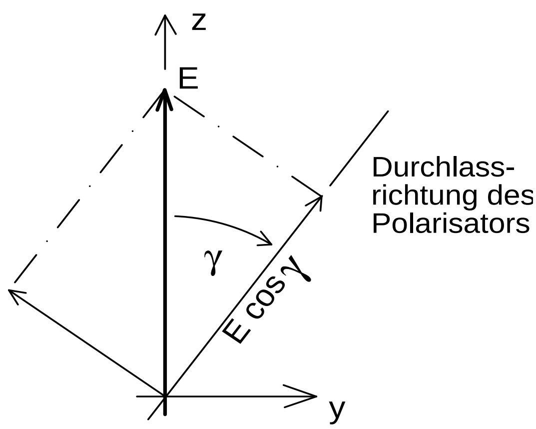
> In einer fortschreitenden elektromagnetischen Welle steht der Vektor der elektrischen Feldstärke normal zur Ausbreitungsrichtung. Falls er zudem nur in einer Ebene schwingt, bezeichnet man die Welle als linear polarisiert. Ist in der Zeichnung die Ausbreitungsrichtung in Richtung der x–Achse und die z–x–Ebene die Schwingungsebene des $\vec{E}$–Vektors, so wird die z–Richtung als Polarisationsrichtung bezeichnet. Aus natürlichem, unpolarisiertem Licht kann man durch 'Ausfiltern' einer Schwingungsebene linear polarisiertes Licht gewinnen. Laser kann man so konstruieren, dass nur linear polarisiertes Licht austritt.

Stimmen Durchlassrichtung und Polarisationsrichtung überein, so wird die Welle (nahezu) vollständig durchgelassen; sind die beiden Richtungen orthogonal, so wird die auffallende Welle (nahezu) vollständig absorbiert.
Schließen die beiden Richtungen – wie in der Zeichnung – einen Winkel $0° \leq \gamma \leq 90°$ ein, so wird ein 'abgeschwächter Teil' der Welle durchgelassen.

Zur Berechnung des durchgelassenen Prozentsatzes zerlegt man den $\vec{E}$–Vektor in zwei Komponenten: eine parallel zur Durchlassrichtung des Polarisators, die andere orthogonal dazu. Da die Parallelkomponente den Betrag $E' = E \cdot \cos\gamma$ besitzt und die Intensität des Lichts proportional zum Quadrat der Feldstärke abnimmt, verringert sich die Intensität I_0 in Abhängigkeit des Winkels γ zu

$$I' = I_0 \cdot \cos^2\gamma. \qquad (1)$$

(So wird z.B. bei $\gamma = 30°$ 75% der auffallenden Intensität I_0 durchgelassen.)



Die Formel (1) lässt sich mit Hilfe einer Fotozelle experimentell leicht überprüfen.

2) Beschreibung mit Photonen

Die Beschreibung als elektromagnetischen Wellenvorgang gilt näherungsweise und nur dann, wenn die Intensität genügend groß ist. Tatsächlich besteht Licht – wie wir heute sicher wissen – aus Teilchen, den Lichtquanten (Photonen). Die Polarisation eines Lichtstrahls kann als Summe der Polarisationen der einzelnen Photonen aufgefasst werden. Für jedes Photon ist die Polarisation eine eigene, elementare Größe, die mit seinem Spin–Vektor verknüpft ist. Ein Lichtstrahl ist dann linear polarisiert, wenn alle Photonen dieselbe Polarisation besitzen.

Mit den heutigen Experimentiertechniken ist es möglich, einzelne Photonen zu erzeugen und sie mit einer gewünschten Polarisation auszustatten; die Quantenphysiker sprechen dann von einer 'Präparation' der Photonen. (Vereinfacht gesagt, wird die Intensität eines linear polarisierten Lichtstrahls so weit reduziert, bis nur mehr einzelne Photonen 'durchtröpfeln'.)

Trifft ein bezüglich einer bestimmten Polarisationsrichtung präpariertes Photon auf ein Polarisationsfilter, so wird es *entweder* durchgelassen *oder* absorbiert.

Wird es durchgelassen, so stimmt seine Polarisation *danach* mit der Durchlassrichtung des Filters überein, seine ursprüngliche Polarisationsrichtung hat es 'vergessen'; seine Energie hf ist jedoch dabei unverändert geblieben.

Können wir voraussagen, ob ein bestimmtes Photon den Polarisator passieren wird oder nicht?

Die Quantentheorie gibt auf derartige Fragen nur Wahrscheinlichkeitsaussagen!

Wir berechnen zunächst die Wahrscheinlichkeit für ein Passieren:
Betrachten wir für eine Zeitdauer Δt einen Wellenzug monochromatischen Lichts, der aus n gleich polarisierten Photonen bestehen soll.

Da Energie das Produkt aus Intensität mal Zeitdauer ist, gilt für die ursprüngliche Gesamtenergie $I_0 \cdot \Delta t = n \cdot hf$. Passieren davon $n' < n$ Photonen das Polarisationsfilter, so sinkt die Gesamtenergie im durchgelassenen Anteil auf $n' \cdot hf$.
Der Anteil n' hängt nach (1) vom Winkel ab: $n' = n \cdot \cos^2 \gamma$.

Für eine sehr große Anzahl n ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Photon das Polarisationsfilter passiert, gleich der relativen Häufigkeit $\frac{n'}{n}$.

Wir erhalten demnach als Ergebnis für die Wahrscheinlichkeit des Passierens:

$$p(\gamma) = \cos^2 \gamma. \tag{2}$$

Bei parallelen Richtungen ist die Wahrscheinlichkeit 1, bei orthogonaler 0, bei allen anderen Winkeln liegt sie zwischen 0 und 1.

> Wir sind bei unseren Überlegungen davon ausgegangen, dass die Photonen nicht miteinander wechselwirken. Experimente mit intensivem Licht und Experimente mit einzelnen Photonen zeigen die gleiche Durchgangswahrscheinlichkeit. Unsere Arbeitshypothese scheint berechtigt zu sein.

Die Gleichung (2) wird in der Quantenmechanik folgendermaßen interpretiert: Bevor ein Photon den Polarisator trifft, lässt sich (außer in den Spezialfällen $\gamma = 0°$ und $\gamma = 90°$) nicht sagen, ob es durchgelassen wird oder nicht, denn das steht *objektiv* noch nicht fest. Der Polarisator kann als ein Messgerät aufgefasst werden, das auf die Frage „Stimmen unsere Richtungen überein oder bist du orthogonal dazu?" alternativ folgendermaßen antwortet: Ja (= durchgekommen) oder Nein (= absorbiert).

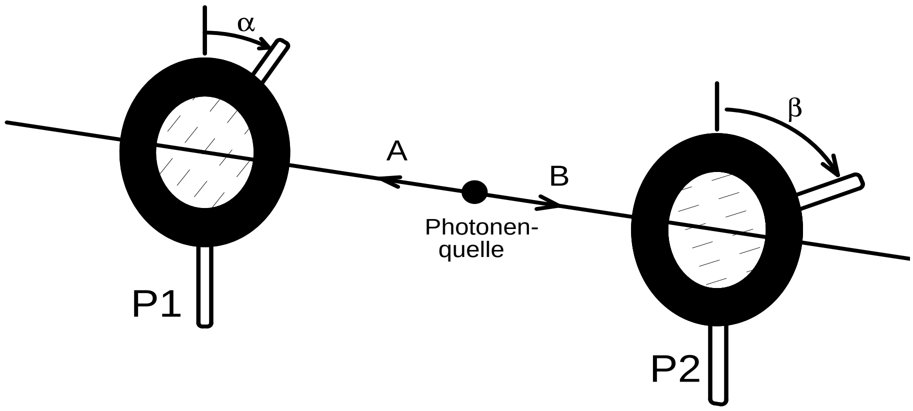
****

Diese Interpretation wurde von Physikern immer wieder angezweifelt. Könnten nicht irgendwelche 'verborgenene' Eigenschaften, die wir noch nicht kennen, für das Durchkommen/Absorbiertwerden verantwortlich sein?
Oder allgemeiner: Sind nicht vielleicht die Unbestimmtheiten, von denen in der Quantenphysik immer wieder die Rede ist, lediglich ein Ausdruck unserer Unkenntnis über einen ansonsten *objektiven* Sachverhalt?

Diese Fragen lassen sich leichter diskutieren – und in einigen Fällen heute sogar experimentell überprüfen – an Systemen aus mehreren Teilchen, die räumlich weit getrennt sein können.

Experimente mit EPR–Photonenpaaren

Wir betrachten einen Aufbau mit zwei Polarisatoren und einer Photonenquelle im Zentrum, die jeweils ein Photonen*paar* emittiert. (Es gibt atomare Zerfalls-Prozesse, bei denen zwei Photonen ausgesandt werden; z.B. emittiert angeregtes Calcium in kurzem Abstand nacheinander zwei Photonen mit entgegengesetztem Spin der 'Wellenlängen' 551,3 nm und 422,7 nm.)



Die Orientierung der beiden Polarisatoren werden hier – bezüglich einer Vertikalen – durch die Winkel α bzw. β angegeben. Die beiden Photonen erreichen nahezu gleichzeitig die Polarisatoren.

Der atomare Prozess, der hier benutzt wird, zeigt folgende Eigenschaft:

Bei jedem Winkel, doch gleicher Stellung der Polarisatoren ($\alpha = \beta =$ beliebig), passieren entweder *beide* Photonen, oder *keines*.

Diese Eigenschaft wird oft so ausgedrückt: „Die beiden Photonen besitzen die gleiche Polarisationsrichtung" (was auch der Drehimpulserhaltungssatz für das emittierende Atom der Quelle fordert).

Dies ist jedoch unpräzis ausgedrückt: Wenn die Photonen jeweils mit einer bestimmten Polarisation erzeugt werden und wenn diese mit den Durchlassrichtungen der Polarisatoren den Winkel α einschließen, so passiert das linke Photon nach (2) mit der Wahrscheinlichkeit $p = \cos^2 \alpha$. Was gleichzeitig am anderen Polarisator passiert, sollte unabhängig davon sein; auch dort sollte das Photon mit der gleichen Wahrscheinlichkeit passieren. Es sollte also durchaus gelegentlich vorkommen, dass eines des Photonen seinen Polarisator passiert, das andere aber nicht.

Genau dies wird jedoch nicht beobachtet!

Es kommen immer entweder beide Photonen durch oder keines. Da dies für jede Winkelstellung gilt – solange $\alpha = \beta$ ist – zwingt dies zur Annahme, dass die Polarisation der Photonen zunächst unbestimmt ist.

Die quantenmechanische Interpretion lautet:
Erst *nachdem* ein Photon den Polarisator passiert hat, ist seine Polarisation bestimmt – übereinstimmend mit der Richtung des Polarisators – und damit liegt auch die Polarisation des anderen Photons fest, übereinstimmend mit der des ersten Photons.
Erst wenn durch eine *Messung* die Polarisationsrichtung *eines* Photons einen scharfen Wert erhält (die Polarisatoren wirken wie Messinstrumente!), dann ist diese Eigenschaft auch am anderen Photon bestimmt.

Die Quantenmechaniker formulieren dies so: 'Die Polarisationen der beiden 'verschränkten Photonen' sind stets im gleichen quantenmechanischen Zustand; ist eine Polarisation unbestimmt ('unscharf'), dann gilt dies auch für das andere Photon. Werden die Polarisationen gemessen, so liefern 'beide Seiten' das gleiche Resultat: entweder kommen beide Photonen durch, oder beide werden absorbiert.

Das Seltsame (Paradoxe) dabei ist, dass für beide Photonen aufgrund ihrer räumlichen Trennung keine „Verabredungsmöglichkeit" besteht. Nach der quantenmechanischen Interpretation hat keines der beiden Photonen ursprünglich eine festgelegte Polarisation, aber dennoch verhalten sie sich immer gleich.

Wie erfährt das eine Photon, was das andere gerade macht?

****

Noch seltsamer wird es, wenn die Polarisatorenrichtungen verschieden sind ($\alpha \neq \beta$) und die Winkel zufällig – etwa durch Würfeln – und unabhängig voneinander eingestellt werden und erst dann, wenn die beiden Photonen bereits auf dem Flug zu den Polarisatoren sind.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass beide Photonen durchkommen?

Das nach links fliegende Photon A treffe den Polarisator P1 und passiere diesen mit der Wahrscheinlichkeit p_0. Da es nicht „weiß" in welcher Richtung der Polarisator P2 steht (hierfür wäre zur Informationsübertragung ein überlichtschnelles Signal erforderlich), verhält es sich so, als ob $\beta = \alpha$ wäre. $p_0 = \frac{1}{2}$ ist daher gerade die Wahrscheinlichkeit, mit der beide Photonen im Fall $\alpha = \beta$ ihre Polarisatoren passieren.

Falls das Photon A durchkam, ist es gemessen worden und seine Polarisierungsrichtung ist α – in Übereinstimmung mit dem Winkel des Polarisators P1. Damit ist aber auch der Polarisationswinkel des Photons B genau α, wenn dieses unmittelbar danach den Polarisator P2 trifft. Für den Vorgang an P2 können wir unsere Formel (2) anwenden: Da es dabei nur auf die Winkeldifferenz $|\alpha - \beta|$ ankommt, ist $\cos^2(\alpha - \beta)$ die Wahrscheinlichkeit für ein Durchkommen.

Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Photonen durchkommen durch das Produkt

$$p(\alpha, \beta) = p_0 \cdot \cos^2(\alpha - \beta) \tag{3}$$

gegeben. Wie zu erwarten, hängt sie von den Orientierungen der Polarisatoren ab und ist symmetrisch bezüglich einer Vertauschung der beiden Winkel.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das linke Photon A durchkommt, das rechte aber nicht?

Hier können wir analog argumentieren: Kommt A mit der Wahrscheinlichkeit p_0 durch, ist seine Orientierung und die des Photons B gleich α. Wenn B mit der Wahrscheinlichkeit $\cos^2(\alpha - \beta)$ durchkommt, wird es mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - \cos^2(\alpha - \beta) = \sin^2(\alpha - \beta)$ absorbiert.

Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit, dass *nur das linke* Photon durchkommt:

$$p(\alpha, \neg\beta) = p_0 \cdot \sin^2(\alpha - \beta). \tag{4}$$

(Test: $\alpha = \beta \hookrightarrow p = 0$; die Wahrscheinlichkeit, dass sich beide Photonen unterschiedlich verhalten, ist Null.)

Diese Aussagen lassen sich ebenfalls experimentell überprüfen.

Nehmen wir der Einfachheithalber an, dass die Polarisatoren nur die 'Raststellungen' $0°, 30°$ und $60°$ besitzen und durch einen Zufallsgenerator die wirkliche Winkelstellung erst eingestellt wird, wenn die Photonen bereits auf dem Weg sind.

Dabei sollen alle Kombinationen $(\alpha_i; \beta_j)$ im statistischen Mittel gleich oft vorkommen.

Es sei n_0 – nach einer großen Anzahl von Messungen – die Anzahl aller Ereignisse, bei denen bei einer festen Winkelkombination A durchkam.

Die Quantentheorie besagt dann, dass – innerhalb statistischer Schwankungen – bei der Winkelkombination (α, β) die Anzahl der Ereignisse
für den Fall, dass beide Photonen durchkommen durch

$$n(\alpha, \beta) = n_0 \cos^2(\alpha - \beta) \tag{5}$$

und für den Fall, dass das linke, aber nicht das rechte Photon durchkommt (oder umgekehrt) durch

$$n(\alpha, \neg\beta) = n_0 \sin^2(\alpha - \beta) \tag{6}$$

gegeben ist.

Die Überprüfung dieser quantenmechanischen Voraussage kann also durch ein Abzählen der Ereignisse erfolgen, wie viele Photonenpaare sich bei einer Winkelkombination so oder so verhalten.

Die Tabellen zeigen nach (5) und (6) die Wahrscheinlichkeiten (in Relation zu n_0) links für das Passieren des Photons B, wenn A seinen Polarisator P1 passiert hat, und und rechts die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass B passiert, wenn A absorbiert wurde – jeweils in Abhängigkeit des Winkelunterschieds $\omega = |\alpha - \beta|$.

A passiert		
ω	B passiert	B wird absorbiert
0°	1	0
30°	0,75	0,25
60°	0,25	0,75
90°	0	1

A passiert nicht		
ω	B passiert	B wird absorbiert
0°	0	1
30°	0,25	0,75
60°	0,75	0,25
90°	1	0

Was mit B geschieht hängt also davon ab, wie es A ergangen ist
und vom Winkelunterschied der Polarisatoren.

Dabei wäre es nach klassischem Verständnis keineswegs zwingend, dass die Wahrscheinlichkeiten der beiden Photonen irgendwie in Bezug zueinander stehen: Selbst wenn die beiden Photonen schon bei ihrer Entstehung in der Quelle eine 'geheime Absprache', einen 'Plan', besäßen, wie sich bei den verschiedenen Winkelstellungen verhalten sollten, so werden die Bedingungen im Versuch ja erst festgelegt, wenn die Photonen bereits unterwegs sind. Dieser 'Plan' könnte sich zwar ebenfalls nach einem Zufallsprinzip ändern. Doch nicht mehr, wenn die Photonen die Quelle verlassen haben; man würde sonst im

Falle paralleler Durchlassrichtungen der Polarisatoren keine garantierte Übereinstimmung erhalten.

Nach einem mathematisch-logischen Satz – Bell'sche Ungleichung – genannt, kann gezeigt werden, dass jeder Plan für ein separates 'Schicksal' eines Photons, nachdem dieses die Quelle verlassen hat, im Widerspruch zu den oben angeführten Messergebnissen der Tabellen stehen würde.

Die Annahme lokaler verborgener Variablen

Nach der Interpretation der Quantentheorie

- sind die Polarisationen der Photonen unmittelbar nach ihrer Erzeugung nicht festgelegt
- kein Photon kennt die Orientierung des Polarisators, auf den es zufliegt (denn diese werden von den Experimentatoren erst im letzten Moment festgelegt)
- keines der Photonen kennt die Durchlassrichtung des Polarisators auf das der Partner anschließend zufliegt.

Kann es sein, dass diese Unbestimmtheit lediglich unsere Unkenntnis ausdrückt?
Wäre es nicht denkbar, dass jedes Photon aus einem Ensemble von Photonenpaaren doch eine „Regel" mit sich trägt, die ihm sagt, wie es sich in jedem Fall verhalten soll?

Ob ein Photon bei einer bestimmten Stellung des Polarisators durchkommen würde oder nicht, wäre dann eine Eigenschaft, die es „besitzen" würde. Weil diese Eigenschaft dem jeweils einzelnen Photon zukommen würde und nicht dem Gesamtsystem, würde man diese als *lokal* bezeichnen.

Über solche Eigenschaften – verborgene Parameter oder verborgene Variablen – macht die Quantentheorie keine Aussage, aber könnten sie nicht dennoch in der Natur bestehen? Wenn ja, dann wäre die Quantentheorie unvollständig, da es dann objektive Tatbestände gäbe, über die sie nichts aussagt.

Wenn also verborgene Parameter existierten, dann müsste *jedes* Photon für *jeden Winkel* δ mit einer der beiden Verhaltensregeln R ausgestattet sein:

„Wenn du auf einen Polarisator der Orientierung δ triffst,"

- Regel $R_\delta : \ldots$ „du kannst passieren", oder
- Regel $\neg R_\delta : \ldots$ „du wirst absorbiert".

Jedes Photon der Gesamtheit besäße also für jeden Winkel δ eine der beiden Eigenschaften, sich gemäß R_δ oder $\neg R_\delta$ zu verhalten.

In unserem (real durchführbaren) Experiment mit den 'Rastwerten' $0°, 30°, 60°$ für α und β müssten sich

- nach $n(\alpha, \beta)$ die halbe Anzahl der Photonen nach R_α oder R_β verhalten, und
- ebenfalls die Hälfte der Photonen gemäß $n(\alpha, \neg\beta)$ nach den Regeln R_α oder $\neg R_\beta$.

Wäre diese Interpretation möglich, so könnten wir hoffen, eines Tages eine *klassische* Theorie zu finden (eine sogenannte lokal-realistische Theorie), in der keine quantenmechanische Unschärfen mehr auftreten und deren Voraussagen jene der Quantentheorie enthalten würden.

Interessanterweise lässt sich jedoch zeigen, dass eine solche Theorie mit den Aussagen der Quantentheorie im Widerspruch stünde.

Die Bell'sche Ungleichung

John Bell versuchte um 1964 die Quantenmechanik durch verborgenene Parameter zu ergänzen, um wieder zu einer lokalen, deterministischen Naturbeschreibung zurückzukehren. Dabei entdeckte er die später nach ihm benannte Ungleichung. Sie erlaubt es, die von der Quantenphysik implizierten Nichtlokalitäten experimentell zu überprüfen.
Zum Verständnis dieser Ungleichung wollen wir zunächst ein anschauliches, analoges Beispiel anführen, bei dem die Objekte eines Ensembles wohldefinierte Eigenschaften besitzen.
In einem Betrieb gelte für jeden Mitarbeiter

- er ist entweder männlich oder weiblich (kurz: w oder $\neg w$)
- er fährt mit dem Auto zur Arbeit oder nicht damit (kurz: a oder $\neg a$)
- er kann französisch oder nicht (kurz f oder $\neg f$)

Wir nehmen an, dass sich diese Eigenschaften allen Mitarbeitern eindeutig zuordnen lassen.

Wenn $n(w,a)$ die Anzahl aller weiblichen Mitarbeiter ist, die mit dem Auto zur Arbeit fahren und $n(a,\neg f)$ die Anzahl aller Mitarbeiter, die mit dem Auto fahren und nicht französisch können, dann gilt die folgende Ungleichung:

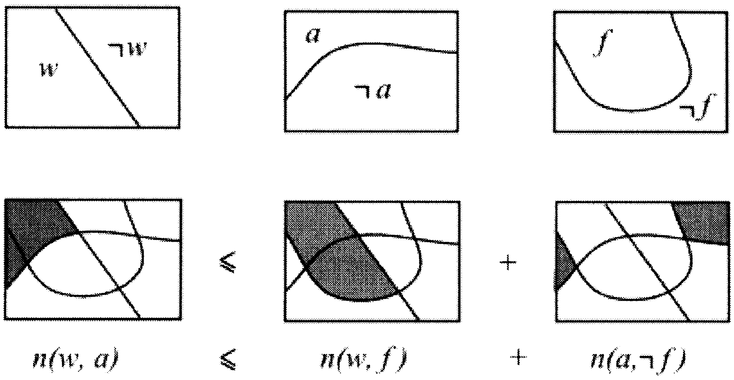
$$n(w,a) \leq n(w,f) + n(a,\neg f). \tag{7}$$

In Worten: „Die Anzahl der Frauen, die mit dem Auto fahren, ist kleiner oder gleich der Anzahl der Frauen, die französisch können plus der Anzahl der autofahrenden Mitarbeiter beiderlei Geschlechts, die nicht französisch können."

Diese Ungleichung gilt generell für drei Paare von Eigenschaften der Form $(A,\neg A)$ und wird als Bell'sche Ungleichung bezeichnet.

Zum Beweis betrachten wir die folgenden Skizzen[3]

[3]Die Bell'sche Ungleichung lässt sich natürlich auch deduktiv aus den Axiomen der Mengenalgebra ableiten:
Sei w die Menge aller weiblicher Mitarbeiter, a die Menge aller Autofahrer, f die Menge aller Französischsprechenden und $\neg f$ das Komplement zu f = die Menge aller Nichtfranzösischsprechenden.
Mit dem Distributivgesetz für beliebige Mengen A, B, C (s. z.B. Klett Formelsammlung, S. 9)
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ist:
$w \cap a = (w \cap a) \cap (f \cup \neg f) = [(w \cap a) \cap \neg f] \cup [(w \cap a) \cap f] \subseteq (w \cap f) \cup (a \cap \neg f)$.
Wenn also $n(w,a)$ = Anzahl der Elemente von $w \cap a$, $n(w,f)$ und $n(a,\neg f)$ entsprechend die Anzahl der Elemente von $(w \cup f)$, bzw. $(a \cup \neg f)$, so ist $n(w,a) \leq n(w,f) + n(a,\neg f)$.



Anwendung der Bell'schen Ungleichung auf EPR–Photonen

Wie oben angeführt, fordert die Annahme lokaler verborgener Parameter, dass die individuellen EPR–Photonen Träger von Eigenschaften sind, die das Durchkommen oder das Absorbiertwerden bewirken.

Die Photonenzahlen, die wir im vorherigen Abschnitt berechnet haben, sind in dieser Interpretation vom selben Typ wie die Zahlen in der Bell'schen Ungleichung, wobei die Eigenschaften um die es geht, die oben beschriebenen Verhaltensregeln R_δ oder $\neg R_\delta$ sind.

Wenn also verborgene Variablen existierten, so müssten die durch (5) und (6) gegebenen Photonenzahlen für *alle* Tripel (α, β, γ) von Orientierungswinkeln die Ungleichung:

$$n(\alpha, \beta) \leq n(\alpha, \gamma) + n(\beta, \neg\gamma) \tag{8}$$

erfüllen.

Die in dieser Ungleichung auftretenden Zahlen haben wir für spezielle Winkelwerte $\alpha = 0°, \beta = 30°$ und $\gamma = 60°$ bereits berechnet. Setzen wir ein (und kürzen n_0 heraus):

$$\cos^2(\alpha - \beta) \leq \cos^2(\alpha - \gamma) + \sin^2(\beta - \gamma),$$

$$\cos^2(-30°) \leq \cos^2(60°) + \sin^2(30°)$$

d.h.

$$\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Dieses *eine* Gegenbeispiel zeigt, dass die Annahme der Existenz verborgener Parameter den Voraussagen der Quantentheorie widerspricht.

Experimentelle Überprüfungen

Erste experimentelle Überprüfungen einer Bell'schen Ungleichung wurden bereits vor 20 Jahren durchgeführt, so in den legendären ASPECT–Experimenten von 1982.

> In diesen Experimenten von Alain Aspect, Grangier und Roger[4] emittierte eine von einem Kr-Laser gepumpte Ca–Ionen-Quelle zwei Photonen in entgegengesetzte Richtungen, deren Polarisation korreliert war. Die Photonen trafen auf drehbare Polarisationsfilter hinter denen je ein Photodetektor stand. Durch eine Koinzidenzschaltung konnten gleichzeitig eintreffende Photonen registriert und die Zählraten mit Filtern mit denen ohne Polarisationsfilter verglichen werden. Die Auswertung ergab: „Our results, in excellent agreement with quantum mechanics predictions, are to a high statistical accuracy a strong evidence against the whole class of realistic local theories."

[4]A. Aspect, P. Grangier, G. Roger, Phys. Rev. Lett. 49(1982) 01 und 49(1982) 1804.

Diese und alle Nachfolger bestätigen, dass die Vorhersagen der Quantenmechanik bezüglich der Korrelation verschränkter Zustände nicht durch lokale Theorien mit verborgenen Parametern beschreibbar ist.

Dennoch wurde und wird immer wieder noch versucht, irgendeinem 'Mechanismus' nachzuspüren, mit dem sich die beiden Photonen doch noch hätten absprechen können.

Von einer Innsbrucker Arbeitsgruppe (Prof. Zeilinger) wurde deshalb 1998 das Experiment mit den zwei Polarisationsfiltern wiederholt, wobei die Filterstellungen durch einen Zufallsgenerator gesteuert wurden und die beiden Filter 400 m voneinander entfernt waren. Jedes Experiment dauerte weniger als $1,3\,\mu$s , so dass eine Signalübertragung, selbst mit Lichtgeschwindigkeit, ausgeschlossen werden konnte.

Auch praktische Anwendungen von verschränkten Quantenzuständen sind inzwischen vorgeschlagen und verifiziert worden.
Verschränkte Zustände lassen sich benutzen, geheime Schlüssel zwischen verschiedenen Stationen abhörsicher zu übertragen. Diese als Quantenkryptographie bezeichnete Methode würde die Verschlüsselung sensitiver Daten und Nachrichten revolutionieren.

1997/98 gelang einer Genfer Gruppe über ein Glasfaserkabel zwischen den Orten Bellevue und Bernex auf eine Distanz von 11 km erfolgreich die nichtlokale Korrelation von Photonen nachzuweisen. Die dieses Zweiteilchensystem beschreibende Wellenfunktion erstreckte sich somit über den Bereich einer Kleinstadt! Dieses Experiment veranschaulichte die von Einstein angezweifelte „geisterhafte Fernwirkung" besonders drastisch. Die Messung des eines Teilchens – der Kollaps der Wellenfunktion – führte instantan zu einem korrelierten Verhalten des anderen, über 10 km entfernten Teilchens!

Gut, dass Einstein solche Zeiten nicht mehr erlebt. Heute gelten Aspects Experimente als historischer Startschuss für eine neue Generation von Experimentatoren. Der alte Einstein konnte sich mit der Realität der Quantenphysik nicht anfreunden und beharrte auf dem Schluss–Satz der 'EPR–Kampfschrift': „Keine vernünftige Definition von Realität könnte so etwas zulassen".

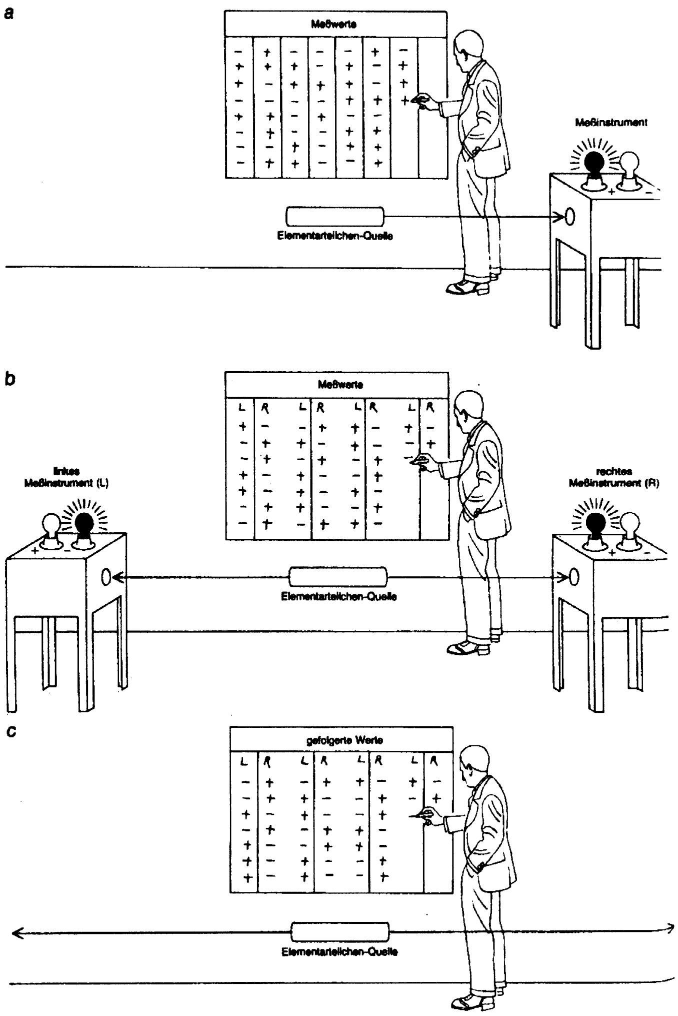
****

Dass dennoch der lokale Realismus weit verbreitet ist, veranschaulicht die nachfolgende Karrikatur:

a) Der Physiker beobachtet eine Eigenschaft eines Teilchens aus einer Elementarteilchen–Quelle. Das Ergebnis zeigt keine Regelmäßigkeit (es scheint keine bestimmte Eigenschaft vorzuliegen)

b) Der Physiker benutzt ein zweites Messgerät und beobachtet die Korrelation der beiden Signale. Das Ergebnis zeigt eine 100%-ige (negative) Korrelation. Hier scheint eine Eigenschaft vorzuliegen.

c) Der Physiker geht davon aus, dass immer eine negative Korrelation vorliegt, auch wenn er sie nicht misst.



Lokaler Realismus – „Was macht dieser Mann falsch?“

Die hier benutzten Voraussetzungen eines lokalen Realismus sind:

- **Realimus:** Objekte haben Eigenschaften, unabhängig davon, ob ich sie messe oder nicht.
- **Induktionsschluss:** Wenn ich einen Effekt hinreichend oft mit genügender Genauigkeit beobachtet habe, gehe ich davon aus, dass er immer, auch ohne meine Beobachtung, auftritt.
- **Separabilität:** Meine Messung (oder ähnliches) an einem Objekt hat keinen Einfluss auf ein anderes Objekt, das von diesem durch einen hinreichend großen Abstand getrennt ist.